Examen
Durée 1h30

Exercice 1.
Une urne contient 3 boules blanches et 3 boules noires. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne. Soit X le nombre de tirages nécessaires. Quelle est la loi de X ?

Exercice 2.
Soient X, Y et Z trois variables indépendantes suivant des lois géométriques de même paramètre p

a. Déterminer la loi de $X + Y$ et $V(X + Y)$

b. Déterminer la loi de X sachant $X + Y = n$

c. Pour tout $k \in IN$, calculer $P(Z \geq k)$

d. Calculer $P(X + Y \leq Z)$

Exercice 3.
Soient X, Y deux variables indépendantes, X suit une loi de Bernoulli de paramètre p et Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit Z la variable aléatoire telle que :

$$Z = \begin{cases} 0 & si\, X = 1 \\ Y & si\, X = 0 \end{cases}$$

a. Calculer la loi de Z et son espérance.

b. Que vaut la probabilité conditionnelle de $X = 0$ sachant que $Z = 0$?

Exercice 4.
La loi d'un couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	1	2	3
1	0	0.4	0
2	0.1	0.2	0.1
3	0	0	0.2

a. Donner les lois marginales de X et Y.

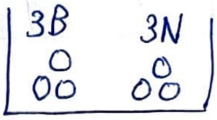
b. Les variables de X et Y sont elles indépendantes ?

c. Calculer la covariance de X et Y. En déduire la variance de $X + Y$

Examen 2024/2025

Exercice 1 :

Soient B_i l'évènement « obtenir une boule blanche dans le ième tirage » et N_i l'évènement « obtenir une boule noire dans le ième tirage.



On a ici, $X(\Omega) = \{3, 4, 5\}$

Donc la loi de X est :

$$P(X=3) = P((B_1 B_2 B_3) \cup (N_1 N_2 N_3))$$
$$= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3) + P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times P_{N_1 \cap N_2}(N_3)$$
$$= \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$$
$$= 2 \times \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$$

$$P(X=4) = P((N_1 B_2 B_3 B_4) \cup (B_1 N_2 B_3 B_4) \cup (B_1 B_2 N_3 B_4) \cup (B_1 N_2 N_3 N_4) \cup (N_1 B_2 N_3 N_4) \cup (N_1 N_2 B_3 N_4))$$
$$= P(N_1) \times P_{N_1}(B_2) \times P_{N_1 \cap B_2}(B_3) \times P_{N_1 \cap B_2 \cap B_3}(B_4) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(N_3) \times P_{B_1 \cap B_2 \cap N_3}(B_4)$$
$$+ P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(N_3) \times P_{B_1 \cap B_2 \cap N_3}(B_4) + P(B_1) \times P_{B_1}(N_2) \times P_{B_1 \cap N_2}(N_3) \times P_{B_1 \cap N_2 \cap N_3}(N_4)$$
$$+ P(N_1) \times P_{N_1}(B_2) \times P_{N_1 \cap B_2}(N_3) \times P_{N_1 \cap B_2 \cap N_3}(N_4) + P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times P_{N_1 \cap N_2}(B_3) \times P_{N_1 \cap N_2 \cap B_3}(N_4)$$
$$= \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4}$$
$$+ \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = 6 \times \frac{1}{20} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=5) = 1 - P(X=4) - P(X=3)$$
$$= 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

on a : $\sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k) = 1$

Donc,

x_i	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

Exercice 2 :

$X, Y, Z \sim G(p)$

a) on trouve 2 cas pour $X+Y=k$ avec $k \in [\![2 ; +\infty[$

- Si $X=1$, on a $Y=k-1$
- Si $X=j$, on a $Y=k-j$

Or les variables sont indépendantes alors :

$$P(X=j \cap Y=k-j) = P(X=j) \times P(Y=k-j)$$

Donc pour calculer $P(X+Y=k)$, il faut calculer la somme des probabilités où $X+Y=k$, on a donc ;

$$P(X+Y=k) = \sum_{j=1}^{k-1} P(X=j) \times P(Y=k-j)$$
$$= \sum_{j=1}^{k-1} p(1-p)^{j-1} \times p(1-p)^{k-j-1}$$
$$= \sum_{j=1}^{k-1} p^2 (1-p)^{k-2} = p^2 (1-p)^{k-2} \sum_{j=1}^{k-1} 1$$

Alors,

$$P(X+Y=k) = p^2 (k-1)(1-p)^{k-2} \quad \text{avec } k = 2, 3, \ldots$$

X et Y sont indépendantes $\Rightarrow cov(X,Y)=0$

Alors:

$V(X+Y) = V(X)+V(Y)$ or $X,Y \sim G(p)$ donc:

$$V(X+Y) = 2\times\left(\frac{1-p}{p^2}\right)$$

b) on a: $P_{[X+Y=n]}(X=j) = \dfrac{P(X=j \cap X+Y=n)}{P(X+Y=n)}$ avec $j \in X(\Omega)$

et on a: $P(X=j \cap X+Y=n) = P(X=j \cap Y=n-j)$
$= P(X=j)\times P(Y=n-j)$
$= p^2(1-p)^{\cancel{j}-1+n-\cancel{j}-1}$
$= p^2(1-p)^{n-2}$

Alors:

$$P_{[X+Y=n]}(X=j) = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{p^2(n-1)(1-p)^{n-2}} = \frac{1}{(n-1)}$$ avec $j \in X(\Omega)$

c) on a l'évènement $\{Z \geqslant k\}$ correspond au « il y n'y a pas de succès dans les $k-1$ premiers essaies », donc:

$$P(Z \geqslant k) = (1-p)^{k-1}$$

d) Pour $X+Y \leqslant Z$, on a $X+Y=n$ donc $n \leqslant Z$

Alors, $P(Z \geqslant n) = (1-p)^{n-1}$

Or X et Y commentent à 1 donc X+Y commencent à 2,

donc $\forall n \geqslant 2$, on a:

$$P(X+Y\leqslant Z) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(X+Y=n)\times P(Z\geqslant n) = \sum_{n=2}^{+\infty} p^2(n-1)(1-p)^{n-2+n-1}$$
$$= p^2\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)(1-p)^{2n-3}$$

Posons $K = n-1 \iff n = K+1$

si $n = 2 \iff K = 1$

$$P(X+Y \leq Z) = p^2 \sum_{K=1}^{+\infty} K(1-p)^{2K-1}$$

$$= p^2 \times \frac{1}{(1-p)} \sum_{K=1}^{+\infty} K\left((1-p)^2\right)^K$$

$$= p^2 \times (1-p) \sum_{K=1}^{+\infty} K\left((1-p)^2\right)^{K-1}$$

$$= p^2 \times (1-p) \times \frac{1}{(1-(1-p)^2)^2}$$

$$= \frac{p^2(1-p)}{(1-(1-2p+p^2))^2}$$

$$= \frac{p^2(1-p)}{p^2(2-p)^2}$$

$$= \frac{1-p}{(2-p)^2}$$

Enfin, $P(X+Y \leq Z) = \dfrac{1-p}{(2-p)^2}$

Exercice 3:

a) Soit $K \in Z(\Omega)$ on a:

• Si $K = 0$:

$X = 1$ ou ($X = 0$ et $Y = 0$) $\Rightarrow P(Z=0) = P(X=1 \cup (X=0 \cap Y=0))$

Donc:

$P(Z=0) = P(X=1) + P(X=0)P(Y=0)$ avec $X \sim B(p)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$P(Z=0) = p + (1-p).e^{-\lambda}$

• Si $K \geq 1$:

$Z = K$ si $X=0$ et $Y=K$ donc:

$P(Z=K) = P(X=0 \cap Y=K) = P(X=0)P(Y=K) = (1-p).\dfrac{e^{-\lambda}.\lambda^K}{K!}$

Donc :

$$P(Z=K) = \begin{cases} p+(1-p).e^{-\lambda} \text{ si } K=0 \\ (1-p).\dfrac{e^{-\lambda}.\lambda^K}{K!} \text{ si } K \geqslant 1 \end{cases}$$

b) $$P_{[Z=0]}(X=0) = \frac{P(X=0 \cap Z=0)}{P(Z=0)} = \frac{P(X=0 \cap Y=0)}{P(Z=0)} = \frac{P(X=0) \times P(Y=0)}{P(Z=0)}$$

Alors :

$$P_{[Z=0]}(X=0) = \frac{(1-p) \times e^{-\lambda}}{p+(1-p) \times e^{-\lambda}}$$

Exercice 4 :

a) Loi marginale de X :

D'après la formule de probabilités totales avec le système complet d'événements $([Y=1],[Y=2],[Y=3])$, on a pour $K \in \{1,2,3\}$:

$$P(X=1) = P(X=1 \cap Y=1) + P(X=1 \cap Y=2) + P(X=1 \cap Y=3)$$
$$= 0 + 0,4 + 0 = 0,4$$

$$P(X=2) = P(X=2 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=2) + P(X=2 \cap Y=3)$$
$$= 0,1 + 0,2 + 0,1 = 0,4$$

$$P(X=3) = P(X=3 \cap Y=1) + P(X=3 \cap Y=2) + P(X=3 \cap Y=3)$$
$$= 0 + 0 + 0,2$$ et on a : $\sum_{K \in X(\Omega)} P(X=K) = 1$

Donc la loi marginale de X est :

K	1	2	3
$P(X=K)$	0,4	0,4	0,2

Loi marginale de Y :

D'après la formule de probabilités totales avec le système complet d'événements ([X=1], [X=2], [X=3]), on a :

$P(Y=1) = P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1) + P(X=3 \cap Y=1)$

$= 0 + 0,1 + 0 = 0,1$

$P(Y=2) = P(X=1 \cap Y=2) + P(X=2 \cap Y=2) + P(X=3 \cap Y=2)$

$= 0,4 + 0,2 + 0 = 0,6$

$P(Y=3) = P(X=1 \cap Y=3) + P(X=2 \cap Y=3) + P(X=3 \cap Y=3)$

$= 0 + 0,1 + 0,2 = 0,3$

on a ici : $\sum_{j \in Y(\Omega)} P(Y=j) = 1$ donc :

La loi marginale de Y est :

j	1	2	3
$P(Y=j)$	0,1	0,6	0,3

b) X et Y sont indépendantes ssi $\forall k \in X(\Omega)$ et $\forall j \in Y(\Omega)$,

$P(X=k \cap Y=j) = P(X=k) \times P(Y=j)$

on a : $P(X=1 \cap Y=1) = 0$ et :

$\begin{cases} P(X=1) = 0,4 \\ P(Y=1) = 0,1 \end{cases} \Leftrightarrow P(X=1) \times P(Y=1) \neq P(X=1 \cap Y=1)$

Alors X et Y ne sont pas indépendantes.

c) $\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

On a : $E(XY) = \sum_{k \in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} kj\, P(X=k \cap Y=j)$ (X et Y ne sont pas indépendantes)

Donc :

$$E(XY) = 2\times 0,4 + 2\times 0,1 + 4\times 0,2 + 6\times 0,1 + 9\times 0,2$$
$$= 4,2$$

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k P(X=k) = 0,4 + 0,8 + 0,6 = 1,8$$

$$E(Y) = \sum_{j \in Y(\Omega)} j P(Y=j) = 0,1 + 1,2 + 0,9 = 2,2$$

Alors :

$$\mathrm{cov}(X,Y) = 4,2 - 1,8 \times 2,2$$
$$= 0,24$$

On a : $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = (0,1 + 4\times 0,6 + 9\times 0,3) - (2,2)^2$$
$$= 0,36$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (0,4 + 4\times 0,4 + 9\times 0,2) - (1,8)^2$$
$$= 0,56$$

Donc :
$$V(X+Y) = 0,56 + 0,36 + 2\times 0,24$$
$$= 1,4$$