Université Ibn Tofail
Faculté des Sciences, Kenitra
Département de Mathématiques

SMI/S3
Probabilités et Statistique
Session rattrapage 2024

Examen

01h30

Exercice 1.
1/3 d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés on compte 1/10 des malades.
Parmi les malades, il y a 3 non vaccinés pour 1 vacciné.
Quelle est la probabilité pour un non vacciné de tomber malade ?

Exercice 2.
Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appels de la clientèle. Pour des causes diverses les interventions ont lieu parfois avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres et que pour chaque appel la probabilité d'un retard est 1/3 .
1. Un client appelle le service à 5 reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fois au ce client a dû subir un retard.
a. Déterminer la loi de probabilité de X, espérance et la variance de X.
b. Calculer la probabilité " Le client a subit au plus un retard"
2. Au cours des années 2022 et 2023 le service après ventes enregistre une succession d'appels. Le rang du premier appel pour lequel est l'intervention s'effectue avec retard en 2022 (resp. 2023) définie une variable aléatoire Y (resp. Z).
a. Déterminer les lois de Y et Z.
b. Calculer $P(Y \leq k)$ pour $k \in IN^*$.
c. On pose $T = \max(Y, Z)$
   i. Calculer $P(T \leq k)$ pour $k \in IN^*$, on rappelle que $\{T \leq k\} = \{Y \leq k\} \cap \{Z \leq k\}$
   ii. Déterminer la loi de T et son espérance.

Exercice 3.
Soient $n \in IN^*$et $p \in]0.1[$. Rachid tire sur une cible avec la probabilité p d'atteindre cette cible. Il tire n fois de suite sur cette cible.
Un compteur comptabilise le nombre de fois où la cible a été atteinte au cous de ces n tirs. Malheureusement le compteur est détraqué : il affiche le bon résultat avec la probabilité ½, et le bon résultat +1 avec la probabilité ½ . Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où Rachid atteint la cible au cours de n tirs. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur.
1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y et son espérance.

Exercice 4.

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi est définie par le tableau :

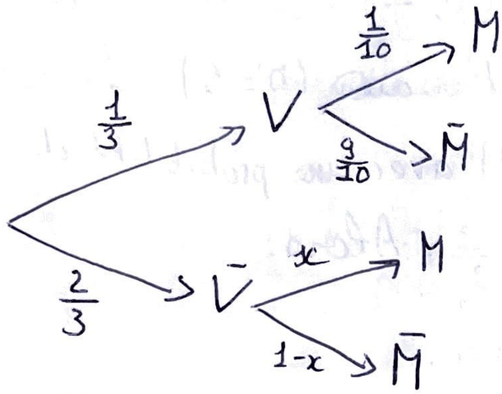
X \ Y	0	1
0	p	$\frac{1}{2} - p$
1	$\frac{1}{3} - p$	$\frac{1}{6} + p$

1. A quel intervalle doit appartenir p pour que ces données soient acceptables ?
2. Donner les lois marginales de X et Y.
3. Déterminer la loi de $X.Y$ et $cov(X, Y)$. Etudier l'indépendance de X et Y.
4. Calculer $P(X = Y)$

Probabilité et Statistiques

Examen Rattrapage 2024

Exercice 1 :



D'après l'énoncé on a : $P_M(\bar{V}) = \frac{3}{4}$ et $P_M(V) = \frac{1}{4}$.

et d'après la formule de probabilités ~~tota~~ composées, on a :

$$P_{\bar{V}}(M) = \frac{P(M \cap \bar{V})}{P(\bar{V})} = \frac{P(M) \times P_M(\bar{V})}{P(\bar{V})}$$

et : $$P_M(V) = \frac{P(V \cap M)}{P(M)} = \frac{P(V) \times P_V(M)}{P(M)}$$

donc : $$P(M) = \frac{P(V) \times P_V(M)}{P_M(V)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{30} \times 4 = \frac{2}{15}$$

Alors : $$P_{\bar{V}}(M) = \frac{\frac{2}{15} \times \frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{20}$$

Exercice 2 :

1) X : Le nombre de fois le client a dû subir un retard

a) La variable aléatoire X représente le nombre de retards sur 5 appels.
~~On~~ a X suit une loi binomiale $B(5, \frac{1}{3})$ car il s'agit d'une expérience avec un nombre fixe d'essais $(n = 5)$, chaque essai avec 2 issus possibles, le succès (retard) avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ ou l'échec avec une probabilité de $\frac{2}{3}$. Alors :

$\forall K \in X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ on a :

$$P(X=K) = \binom{5}{K} \left(\frac{1}{3}\right)^K \left(\frac{2}{3}\right)^{5-K} \quad E(X) = \frac{5}{3} \text{ et } V(X) = \frac{5}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$$

b) L'événement "Le client a subit au plus un retard" signifie que le client à subir 1 ou 0 retards donc :

$$\{X \leq 1\} = \{X = 0\} \text{ ou } \{X = 1\}$$

Alors : $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{112}{243}$

Enfin, $\boxed{P(X \leq 1) = \frac{112}{243}}$

2) Y : Le rang de la premier retard en 2022

Z : Le rang de la premier retard en 2023.

a) Les variables aléatoires Y et Z représentent le rang de la premier appel qui à subir un retard qui correspond au nombre d'essaies nécessaires pour avoir le premier retard. Les appels sont indépendantes et chaque appel ayant une probabalité de $\frac{1}{3}$ pour subir une retard. Donc $Y, Z \sim \mathcal{G}(\frac{1}{3})$, où Y et Z suit une loi géométrique de paramètres $\frac{1}{3}$.

Donc : $\forall K \in Y(\Omega) = Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ on a :

$$P(Y=K) = P(Z=K) = \left(\frac{2}{3}\right)^{K-1} \cdot \frac{1}{3}$$

b) on a : $\{Y \leq K\} = 1 - \{Y > K\}$ où $\{Y > K\}$ représente l'évènement « Pas de retard parmi les K premiers appels ». Donc :

$$P(Y \leq K) = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^K = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^K \text{ avec } K \in \mathbb{N}^*$$

(même chose pour $P(Z \leq K)$)

c) i) $T = \max(Y, Z)$

On a ici : $\{\max(Y,Z) \leq K\} = \{Y \leq K\}$ et $\{Z \leq K\}$

Donc : $P(T \leq K) = P(Y \leq K) \times P(Z \leq K)$ sachant que Y et Z sont indépendantes donc :

$$P(T \leq K) = \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^K\right]^2$$

ii) on a : $P(T \leq K) = P(T = K) + P(T \leq K-1)$

Donc : $P(T=K) = P(T \leq K) - P(T \leq K-1)$

$$= \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^K\right]^2 - \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{K-1}\right]^2$$

on a : $E(T) = E(\max(Y, Z))$

À l'aide de la formule suivant : $\max(Y, Z) + \min(Y, Z) = \ldots$

on a : $E(T) = E(Y + Z - \min(Y, Z)) = E(Y) + E(Z) - E(\min(Y, Z))$

d'où $\{\min(Y, Z) \geq K\} = \{Y \geq K$ et $Z \geq K\}$ $\leftarrow E(\min(Y,Z)) = \sum_{K=1}^{+\infty} P(\min(\ \ ) \geq K$

~~⇒ P(min(Y, Z)) = P(~~

$$\Rightarrow P(\min(Y,Z) \geqslant K) = P(X \geqslant K) \cdot P(Z \geqslant K)$$

$$= \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{K-1}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{4}{9}\right)^K$$

$$= \frac{9}{4} \times \left(\frac{4}{9}\right)^K$$

Donc : $E(\min(Y,Z) \geqslant K) = \frac{9}{4} \sum_{K=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^K$

$$= \frac{9}{4} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}$$

~~Alors : E(T) = 3/2 + 3/2 − 9/5 =~~

Alors : $E(T) = 3 + 3 - \frac{9}{5} = \frac{21}{5}$

Exercice 3 :

1) La variable aléatoire Y correspond au nombre de fois où Rachid atteint la cible au cours de n tirages. Donc X suit une loi binomiale $B(n, p)$ car il s'agit d'une expérience avec une nombre fixe des essais n, chaque essai avec 2 issus possibles, le succes (ciblble atteinte avec une probabilité de p ou l'échec $(1-p)$.

On a donc : $\forall K \in X(\Omega) = [\![0 ; n]\!]$; $P(X=K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$

2) ~~*~~ La variable aléatoire X correspond au nombre afficher par le compteur : le bon résultat ~~X~~ avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ ou le bon résultat plus 1 $X+1$. Donc :

$P(Y=K) = \frac{1}{2} P(X=K) + \frac{1}{2} P(X=K-1)$ avec $K = \{0, \dots, n+1\}$

Si $K=0$:

$$P(Y=0)=\frac{1}{2}P(X=0)=\frac{1}{2}(1-p)^n$$

Si $K=1,2,\dots,n$:

$$P(Y=K)=\frac{1}{2}P(X=K)+\frac{1}{2}P(X=K-1)$$

Si $K=n+1$:

$$P(Y=n+1)=\frac{1}{2}P(X=n)=\frac{1}{2}p^n$$

on a : $E(Y)=E(\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}X+\frac{1}{2})=E(\frac{1}{2}X)+E(\frac{1}{2}X)+E(\frac{1}{2})$

donc : $E(Y)=E(X)+\frac{1}{2}$

or $X\sim B(n,p)$:

$$E(Y)=np+\frac{1}{2}$$

Exercice 4 :

1) on a : $\begin{cases} p\geqslant 0 \\ \frac{1}{2}-p\geqslant 0 \Rightarrow p\leqslant\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}-p\geqslant 0 \Rightarrow p\leqslant\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6}+p\geqslant 0 \Rightarrow p\geqslant-\frac{1}{6} \text{ (toujours vrai car } p\geqslant 0) \end{cases}$

La contraite la plus restrictif est $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{3}$. De plus quelle que soit, la somme des ~~probabilites~~ probabilités vaut 1.

Donc l'intervalle de p est :

$$0\leqslant p\leqslant\frac{1}{3}.$$

2) Loi marginale de X :

D'après la formule de probabilités totales avec le système complet d'évènements $([Y=0],[Y=1])$, on a :

$$P(X=0) = P(X=0 \cap Y=0) + P(X=0 \cap Y=1)$$
$$= p + \frac{1}{2} - p = \frac{1}{2}$$

$$P(X=1) = P(X=1 \cap Y=0) + P(X=1 \cap Y=1)$$
$$= \frac{1}{3} - p + \frac{1}{6} + p = \frac{1}{2}$$

on a aussi $P(X=0) + P(X=1) = 1$

Donc la loi marginale de X est :

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Loi marginale de Y :

D'après la formule de probabilités totales avec le système complet d'évènements $([X=0],[X=1])$, on a :

$$P(Y=0) = P(X=0 \cap Y=0) + P(X=1 \cap Y=0) = p + \frac{1}{3} - p = \frac{1}{3}$$

$$P(Y=1) = P(X=0 \cap Y=1) + P(X=1 \cap Y=1) = \frac{1}{2} - p + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$P(Y=0) + P(Y=1) = 1$ donc :

y_i	0	1
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

3) On a $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ alors :

$$XY(\Omega) = \{0, 1\}$$

Loi marginale de XY :

$$P(XY=0) = P((X=0 \cap Y=0) \cup (X=0 \cap Y=1) \cup (X=1 \cap Y=0))$$

$$= \cancel{P(X=0)P(Y=0) + P(X=0)P(Y=1) + P(X=1)P(Y=0)}$$

$$= p + \left(\frac{1}{2} - p\right) + \left(\frac{1}{3} - p\right) = \frac{5}{6} - p$$

$$P(XY=1) = P(X=1 \cap Y=1) = \frac{1}{6} + p$$

On a aussi : $P(XY=0) + P(XY=1) = 1$

Donc la loi marginale de XY est :

K	0	1
$P(XY=K)$	$\frac{5}{6} - p$	$\frac{1}{6} + p$

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= 0 \times \left(\frac{5}{6} - p\right) + \left(\frac{1}{6} + p\right) - \left[0 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 1 \times \frac{1}{2}\right]\left[0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{6} + p - \frac{2}{6} = p - \frac{1}{6}$$

X et Y sont independantes si $p = \frac{1}{6}$ et sinon si $p \neq \frac{1}{6}$.

4) D'après la formule de probabilités totales, on a :

$$P(X=Y) = P(X=0 \cap Y=0) + P(X=1 \cap Y=1)$$

$$= p + \frac{1}{6} + p = 2p + \frac{1}{6}$$