Université IBN TOFAÏL
Faculté des Sciences
Département
De Mathématique
Kénitra

Rattrapage
SMI
Probabilité
Semestre 3
2022 - 2023

Exercice 1:

$\frac{1}{3}$ d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte $\frac{1}{10}$ de malades. Parmi les malades, il y a 3 non vaccinés pour un vacciné. Quelle est la probabilité pour un non vacciné de tomber malade? (On notera V l'événement "être vacciné" et M l'événement "être malade").

****

Exercice 2:

Un concierge a des trous de mémoire par moment. Il possède un trousseau de 8 clés dont une seule permet d'ouvrir la porte en face de lui. Soit X le nombre de clés essayées pour ouvrir la porte.

1- Déterminer la loi de X. (Envisager deux cas avec ou sans remise).

2- Le concierge a des tous de mémoire un jour sur quatre et quand il a des trous de mémoire, il essaie les clés au hasard avec remise. Si non il procède sans remise. Sachant qu'un jour, 6 essaies ont été nécessaire pour ouvrir la porte. Quelle est la probabilité que le concierge ait eu un trou de mémoire ce jour là? (On pourra noter T l'événement "Le concierge a un trou de mémoire")

****

Exercice 3:

Le tableau ci-dessous donne la loi d'un couple de variable aléatoires (X, Y), avec X et Y prennent chacune leurs valeurs dans $\{1, 2, 3\}$.

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0

1- Calculer la probabilité que X et Y soit égales.

2- Déterminer la lois de X, Y, et du produit XY

3- Donner la covariance de X et Y. Sont-elles indépendantes?

****

Exercice 4:

On considère $n > 1$ personnes qui se répartissent au hasard dans 3 hôtels H_1, H_2, et H_3. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant choisi l'hôtel H_i.

1- Déterminer les lois des trois variables aléatoires X_1, X_2, et X_3.

2- Déterminer la loi de $(X_1 + X_2)$ et la variance de $(X_1 + X_2)$.

3- Calculer la covariance de X_1 et X_2 et le coefficient de corrélation linéaire $r(X_1, X_2)$ défini par

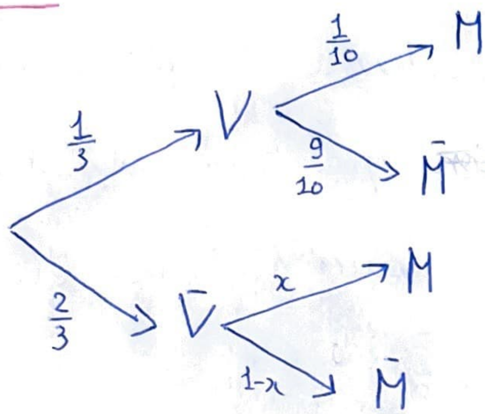
$$r(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma(X_1)\,\sigma(X_2)}$$

****

Probabilité et statistiques

Rattrapage SMI 2022

Exercice 1:



D'après l'énoncé, on a: $P_M(\bar{V}) = \frac{3}{4}$ et $P_M(V) = \frac{1}{4}$

on veut calculer $P_{\bar{V}}(M)$:

D'après la formule de probabilités composée, on a:

$$P_{\bar{V}}(M) = \frac{P(M) \times P_M(\bar{V})}{P(\bar{V})}$$

et : $$P_M(V) = \frac{P(V) \times P_V(M)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{10}}{P(M)}$$

$$\Rightarrow P(M) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{10}}{P_M(V)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{15}$$

Donc: $$P_{\bar{V}}(M) = \frac{\frac{2}{15} \times \frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{20}$$

Enfin, $\boxed{P_{\bar{V}}(M) = \frac{3}{20}}$

Exercice 2 : Cas avec remise

1) X : Le nombre de clés essayées pour ouvrir la porte.

La variable aléatoire X correspond au nombre d'essais pour trouver la clé qui représent le position de la première fois on obtient le clé correcte. Donc X suit une loi géométrique ~~(...)~~ $\mathcal{G}(\frac{1}{8})$ car il s'agit d'une répétition indépendante de bernoulli jusqu'à le premier succès. On a donc :

$$\forall k \in X(\Omega) = \mathbb{N}^* ; \; P(X=k) = \left(\frac{7}{8}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)$$

Cas sans remise :

X suit une loi uniforme car le concierge essaie les clés une par une sans le remettre avec l'ensemble des clés après chaque tentative. Chaque clé à une probabilité constante $p = \frac{1}{8}$ d'être la clé correcte.

On a : $\forall k \in X(\Omega) = [\![1;8]\!] ; \; P(X=k) = \frac{1}{8}$

2) On a d'après la formule de probabilités composée :

$$P_{[X=6]}(T) = \frac{P(T) \times P_T(X=6)}{P(X=6)}$$

et d'après la formule de probabilités totales avec le système complet d'événements $\{T, \bar{T}\}$, on a :

$$P(X=6) = P(T) \times P_T(X=6) + P(\bar{T}) \times P_{\bar{T}}(X=6) = \frac{1}{4}\left(\frac{7}{8}\right)^5\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{3}{4} \times \frac{1}{8}$$

Donc : $P_{[X=6]}(T) = \dfrac{\frac{1}{4}\times\left(\frac{7}{8}\right)^5\left(\frac{1}{8}\right)}{\frac{1}{4}\left(\frac{7}{8}\right)^5\left(\frac{1}{8}\right)+\frac{3}{4}\times\frac{1}{8}} = \dfrac{\left(\frac{7}{8}\right)^5}{\left(\frac{7}{8}\right)^5+3} \simeq 0,146$

Exercice 3 :

X \ Y	1	2	3
1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0

1) D'après la formule de probabilités totales, on a :

$$P(X=Y) = P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=2) + P(X=3 \cap Y=3)$$
$$= 0 + 0 + 0$$

Donc X jamais égale a Y.

2) **Loi marginale de X :**

D'après la formule de probabilités totales avec le système complet d'événements $([Y=1], [Y=2], [Y=3])$, on a :

$$P(X=1) = P(X=1 \cap Y=1) + P(X=1 \cap Y=2) + P(X=1 \cap Y=3)$$
$$= 0 + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(X=2) = P(X=2 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=2) + P(X=2 \cap Y=3)$$
$$= \frac{2}{9} + 0 + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(X=3) = P(X=3 \cap Y=1) + P(X=3 \cap Y=2) + P(X=3 \cap Y=3)$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + 0 = \frac{1}{3}$$

et : $\sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k) = 1$

Donc, la loi marginale de X est :

K	1	2	3
$P(X=K)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Loi marginale de Y :

D'après la formule de probabilités totales avec le système complet d'évènements $([X=1],[X=2],[X=3])$, on a :

$$P(Y=1) = P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1) + P(X=3 \cap Y=1)$$
$$= 0 + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(Y=2) = P(X=1 \cap Y=2) + P(X=2 \cap Y=2) + P(X=3 \cap Y=2)$$
$$= \frac{1}{9} + 0 + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(Y=3) = P(X=1 \cap Y=3) + P(X=2 \cap Y=3) + P(X=3 \cap Y=3)$$
$$= \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + 0 = \frac{1}{3}$$

Et $\sum_{j \in Y(\Omega)} P(Y=j) = 1$

Alors, la loi marginale de Y est :

j	1	2	3
$P(Y=j)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Loi marginale de XY :

On a : $X(\Omega)=\{1,2,3\}$ et $Y(\Omega)=\{1,2,3\}$ et $X\neq Y$. on a :

$XY(\Omega)=\{2,3,6\}$

$P(XY=2)=P((X=1\cap Y=2)\cup(X=2\cap Y=1))=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}$

$P(XY=3)=P((X=1\cap Y=3)\cup(X=3\cap Y=1))=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$

$P(XY=6)=P((X=2\cap Y=3)\cup(X=3\cap Y=2))=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}$

On a aussi $\sum_{k\in XY(\Omega)} P(XY=k')=1$

k'	2	3	6
$P(XY=k')$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

3) $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

on a : $E(XY)=2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$

$E(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}=2$

$E(Y)=E(Y)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+1=2$

Donc : $cov(X,Y)=\frac{11}{3}-4=-\frac{1}{3}$

Exercice 4:

1) La variable aléatoire X_i correspond au nombre de personnes ayant choisi le hôtel H_i. X_i suit une loi binomiale $B(n, \frac{1}{3})$ car chaque personne choisit indépendemment un hotêl avec une probabilité constante de $\frac{1}{3}$ de choisir l'un de 3 hotêls. Donc $X_1, X_2, X_3 \sim B(n, \frac{1}{3})$

$\forall K \in X_i(\Omega)$ avec $i = 1, 2, 3$

$$P(X_1 = K) = P(X_2 = K) = P(X_3 = K) = \binom{n}{K} \left(\frac{1}{3}\right)^K \left(\frac{2}{3}\right)^{n-K}$$

2) On a $(X_1 + X_2)$ qui représente le nombre totale de personnes ayant dans les hôtels H_1 et H_2. Comme chaque choisit un hôtel independamment on a:

$(X_1 + X_2) \sim B(n, \frac{2}{3})$, où $(X_1 + X_2)$ suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

3) On utilise la formule de covariance pour les variables binomiales multinomiales alors;

$\text{cov}(X_1, X_2) = -n p_1 p_2 = -\frac{n}{9}$; $V(X_1) = V(X_2) = n \times \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2n}{9}$

$$r(X_1, X_2) = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sigma(X_1)\sigma(X_2)} = \frac{-\frac{n}{9}}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}} = \frac{-\frac{n}{9}}{\frac{2n}{9}}$$

Donc: $r(X_1, X_2) = \frac{-1}{2}$