Université Ibn Tofail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques Kenitra

Année universitaire 2013-2014

SMAI-S4 : Probabilités et Statistiques

Rattrapage Juillet 2014

Durée : 1heure 30

Exercice 1. Une urne contient initialement une boule rouge et une boule blanche. On effectue une succession de tirages d'une boule avec la règle suivante : après chaque tirage la boule tirée est remise dans l'urne, et on rajoute dans cette même urne une boule de la même couleur que la boule qui vient d'être tirée.

Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n le nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirage.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. Conjecturer la loi de X_n et démontrer ce résultat par récurrence sur n.

Exercice 2. Soient $X_1, X_2, \cdots X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

On note Y la variable aléatoire définie par :

$$Y = max(X_1. X_2. \cdots, X_n).$$

1. Déterminer la loi de probabilité de Y.
2. Montrer que
$$E(Y) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n.$$

Exercice 3. Le couple (X, Y) de variables aléatoires sur (Ω, T, P) est tel que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall i \in \mathbb{N}^*$: $P(X = i. Y = j) = \frac{k}{3^{i+j}}$.

1. Déterminer k pour que cette donnée définisse bien une loi conjointe.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4. Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p et Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. X et Y sont supposées indépendantes. On pose $Z = XY$.

1. Donner $E(Z)$ et $V(Z)$.
2. Calculer $P(Z = 0)$ puis $P(Z = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5. Soient p et q deux réels de $]0,1[$ tels que $p+q=1$. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes telles que :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = Z(\Omega) = \mathbb{N}$$

et

$$\forall k \in \mathbb{N} : P(X=k) = P(Y=k) = P(Z=k) = pq^k$$

1. Déterminer la loi de $X+Y$.
2. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, calculer $P(Z \geq k)$.
3. Calculer la probabilité de l'événement $(X+Y \leq Z)$

Probabilité et Statistiques

Examen Rattrapage 2014

Exercice 1:

Soient l'événement B_i : « on tire une boule blanche en ième tirage » et R_i : « On tire une boule rouge en ième tirage ».

Et X_n la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules blanches obtenues au cours de n premiers tirages.

1) $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$

$P(X_1 = 0) = P(R_1) = \frac{1}{2}$

$P(X_1 = 1) = P(B_1) = \frac{1}{2}$

k_1	0	1
$P(X_1 = k_1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Donc: $P(X_1 = k_1) = \frac{1}{2}$ avec $k_1 = 1, 2$

2) $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$P(X_2 = 0) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P(X_2 = 1) = P((B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)) = P(B_1) \times P_{B_1}(R_2) + P(R_1) \times P_{R_1}(B_2)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$P(X_2 = 2) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

k_2	0	1	2
$P(X_2=k_2)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Donc : $P(X_2 = k_2) = \frac{1}{3}$ avec $k_2 = 0, 1, 2$

3) On conjecture que $X_n \sim U([0,n])$, où X_n suit une loi uniforme sur $[0, n]$ tel que :

$$P(X_n = k) = \frac{1}{n+1} \quad \text{avec } k = 0, 1, \dots, n$$

Preuve par récurrence :

Pour $n=1$: on a : $P(X_1 = k) = \frac{1}{2}$ (D'après 1)

et $P(X_1 = k) = \frac{1}{2}$ (D'après la conjecture) ;

Donc vrai pour $n = 1$.

Pour $n \geqslant 1$:

Supposons que : $X_n \sim U([0,n])$ et montrons que : $X_{n+1} \sim U([0, n+1])$:

D'après la formule de probabilité totales, on a :

$$P(X_{n+1} = k) = P(X_n = k-1) \times P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1}=k) + P(X_n = k) \times P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k)$$

avec : $\begin{cases} P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1}=k) = \frac{(k-1)+1}{(n+1)+1} = \frac{k}{n+2} & \text{avec } k = 1, 2, \dots, n+1 \\ P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k) = \frac{n-k+1}{(n+1)+1} = \frac{n-k+1}{n+2} & \text{avec } k = 0, 1, \dots, n+1 \end{cases}$

Donc : $\forall K \in [\![1 ; n+1]\!]$:

$$P(X_{n+1} = K) = \frac{1}{n+1} \times \frac{K}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{n-K+1}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2}$$

D'où, $X_{n+1} \sim U([0, n+1])$

Donc d'après le principe de récurrence on a :

$$\forall K \in [\![0, n]\!], n = 1, 2, \dots, \quad P(X_n = K) = \frac{1}{n+1} \text{ avec } X \sim U([0, n])$$

Exercice 2 :

1) on a : $P(Y = K) = P(Y \leq K) - P(Y \leq K-1)$

or $Y = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Donc : $P(Y \leq K) = P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq K)$

$$= P(X_1 \leq K \cap X_2 \leq K \cap \dots \cap X_n \leq K)$$

Et les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, donc :

$$P(Y \leq K) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq K)$$

$$P(X_i \leq K) = \sum_{j=1}^{K} P(X_i = j) = \sum_{j=1}^{K} \frac{1}{n} = \frac{K}{n}$$

Donc : $P(Y \leq K) = \prod_{i=1}^{n} \frac{K}{n} = \left(\frac{K}{n}\right)^n$

Alors : $\boxed{P(Y = K) = \left(\frac{K}{n}\right)^n - \left(\frac{K-1}{n}\right)^n}$

2) on a : $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} P(Y \geq i)$

Et: $P(Y \geq i) = 1 - P(Y \leq i-1) = 1 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^n$

Donc : $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^n\right) = n - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^n$

Posons $K = i-1 \Rightarrow i = K+1$

si $i=1 \Rightarrow K=0$ et si $i=n \Rightarrow K=n-1$

Alors : $\boxed{E(Y) = n - \sum_{K=0}^{n-1} \left(\frac{K}{n}\right)^n}$

Exercice 3 :

1) Pour que la couple (X,Y) soit une loi conjointe, il faut que :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} P(X=i \cap Y=j) = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{K}{3^{i+j}} = 1 \Rightarrow K \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j = 1$$

$$\Rightarrow K \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1$$

$$\Rightarrow K \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow K = 4$$

Donc $K=4$ pour que (X,Y) pour devient une loi conjointe.

2) Loi marginale de X et Y :

$$P(X=i) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X=i \cap Y=j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{4}{3^{i+j}}$$

$$= \frac{4}{3^i} \times \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j$$

$$= \frac{4}{3^i} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{4}{3^i} \times \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{2}$$

$$= \frac{2}{3^i}$$

Donc la loi marginale de X est : $P(X=i) = \frac{2}{3^i}$ avec $i \in \mathbb{N}^*$

$$P(Y=j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i \cap Y=j) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{4}{3^{i+j}} = \frac{4}{3^j} \times \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i$$

$$= \frac{4}{3^j} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}$$

$$= \frac{2}{3^j}$$

Donc la loi marginale de Y est : $\boxed{P(Y=j) = \frac{2}{3^j}}$

3) on a : $P(X=i) \times P(Y=j) = \frac{4}{3^{i+j}}$ et $P(X=i \cap Y=j) = \frac{4}{3^{i+j}}$

Donc X et Y sont indépendantes.

Exercice 4 :

1) on a $Z = XY$ et X, Y sont independantes, donc :

$$E(Z) = E(X)E(Y) = p.\lambda$$

$$V(Z) = E(X^2Y^2) - [E(XY)]^2$$

$$= E(X^2)E(Y^2) - [E(XY)]^2$$

on a : $\begin{cases} E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = pq + p^2 = p - p^2 + p^2 = p \\ E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = \lambda + \lambda^2 = \lambda(1+\lambda) \end{cases}$

Donc :

$$V(Z) = p\lambda(1+\lambda) - (p\lambda)^2$$

$\boxed{E(Z) = p\lambda}$ et $\boxed{V(Z) = p\lambda(1+\lambda) - (p\lambda)^2}$

2) Pour $Z = 0$:

on a : $X(\Omega) = \{0, 1\}$

$\to Z = 0$ si $(X = 0)$ ou $(X = 1$ et $Y = 0)$:

$$\Rightarrow P(Z=0) = P((X=0) \cup (X=1 \cap Y=0))$$

$$= P(X=0) + P(X=1)P(Y=0)$$

$$= (1-p) + p.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^0}{0!} = (1-p) + pe^{-\lambda}$$

Pour $Z = k$; $k \in \mathbb{N}^*$:

$X = 1$ et $Y = k \Rightarrow P(Z=k) = P(X=1 \cap Y=k) = p.\dfrac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}$

Donc :

$$P(Z=k)=\begin{cases}(1-p)+pe^{-\lambda} & \text{si } k=0\\ p.\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} & \text{si } k\geq 1\end{cases}$$

Exercice 5 :

1) Soit $X+Y=k$ avec $k\in\mathbb{N}$:

si $X=0 \Rightarrow Y=k$

si $X=j \Rightarrow Y=k-j$ avec $j\in[\![0;k]\!]$

Donc : $P(X+Y=k)=\sum_{j=0}^{k}P(X=j\cap Y=k-j)$

$$=\sum_{j=0}^{k}P(X=j)\times P(Y=k-j)$$ (car X et Y sont independantes)

$$=\sum_{j=0}^{k}pq^j\times pq^{k-j}$$

$$=p^2q^k\sum_{j=0}^{k}1$$

$$=p^2q^k(k+1)$$

Alors : $\boxed{P(X+Y=k)=p^2q^k(k+1)}$

2) $\forall k\in\mathbb{N}$, on a : $P(Z\geq k)=\sum_{j=k}^{+\infty}P(Z=j)=\sum_{j=k}^{+\infty}pq^j=p\sum_{j=k}^{+\infty}q^j$

$$\Rightarrow P(Z\geq k)=p.q^k.\frac{1}{1-q}=\frac{pq^k}{1-q}=\frac{pq^k}{p}=q^k$$

Donc : $\boxed{P(Z\geq k)=q^k}$

(8)

3) $X+Y \leq Z$ si $X+Y=K$ et $K \leq Z$, $\forall K \in \mathbb{N}$ donc:

$$P(X+Y\leq Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X+Y=k) \times P(k\leq Z)$$

$$= \sum_{K=0}^{+\infty} p^2 q^K (K+1)\, q^K$$

$$= p^2 \sum_{K=0}^{+\infty} (K+1)(q^2)^K$$

$$= p^2 \cdot (q^2)^0 \cdot \frac{1}{(1-q^2)^2} = \frac{p^2}{(1-q)^2(1+q)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+q)^2}$$

Donc : $P(X+Y\leq Z) = \dfrac{1}{(1+q)^2}$