Probabilités

Université Ibn Tofail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques Kenitra

Année universitaire 2013-2014

SMAI-S4 : Probabilités et Statistiques
Examen Juin 2014
Durée : 1heure 30

Exercice 1. Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont lieu parfois avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0.25. X

1. Un client appelle le service à quatre reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X, l'espérance et la variance de X.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement : " le client a subit au moins un retard "
2. Au cours des années 1998 et 1999 le service après-vente enregistre une succession d'appels. Le rang du premier appel pour lequel l'intervention s'effectue avec retard en 1998 (resp. 1999) définit une variable aléatoire Y (resp. Z).
   (a) Déterminer les lois de Y et Z.
   (b) Calculer $P(Y \leqslant k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (c) On pose $T = \max(Y, Z)$.
      i. Calculer $P(T \leqslant k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
      ii. Déterminer la loi de T.
      iii. Calculer l'espérance de T.

Exercice 2. 1. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$ respectivement. Montrer que $X_1 + X_2$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. Y

2. Soient maintenant X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$ respectivement. Montrer que $X_1 + X_2$ suit une loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Exercice 3. Soient p et q deux réels de $]0, 1[$ tels que $p + q = 1$. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes telles que :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = Z(\Omega) = \mathbb{N}$$

et

$$\forall k \in \mathbb{N} : P(X = k) = P(Y = k) = P(Z = k) = pq^k$$

1. Déterminer la loi de $X+Y$.
2. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}_1$ calculer $P(Z \geq k)$.
3. Calculer la probabilité de l'événement $(X+Y \leq Z)$

Exercice 4. Une urne contient a boules rouges et b boules noires($a, b \in \mathbb{N}^*$. On effectue une succession de tirages d'une boule avec la règle suivante : si on tire une boule rouge, on la remet dans l'urne, si c'est une boule noire qu'on tire on ne la remet pas dans l'urne. On note X le nombre de tirages nécessaires pour tirer la première boule noire, et Y le nombre de tirages nécessaires pour tirer la première boule rouge.

1. Déterminer la loi de X, l'espérance et la variance.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, admettant un moment d'ordre 1. Démontrer la formule : $E(X) = \sum_{i \geq 1} P(X \geq i)$

Probabilités et Statistiques

Examen 2014 Normale

Exercice 1 :

1) a) La variable aléatoire X représente le nombre de fois où le client a subi un retard après 4 appels. On a donc : X suit une loi binomiale $B(4, \frac{1}{4})$ car on compte le nombre de succès obtenus en 4 épreuves identiques et indépendantes (succès avec probabilité de $p = \frac{1}{4}$). Donc :

$$X(\Omega) = [\![0;4]\!] \ ; \forall k \in X(\Omega) : P(X=k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{4-k}$$

$$E(X) = 4 \times \frac{1}{4} = 1 \quad \text{et} \quad V(X) = 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

1) b) On a : $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$ (En utilisant le règle de complément)

$$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{175}{256} \simeq 0,68$$

2) a) Les variables aléatoires Y et Z représentent le rang du premier appel pour lequel s'effectue avec retard en 1998 (resp. 1999). Donc Y et Z suit une loi géométrique $G(\frac{1}{4})$ car on détermine le nombre d'épreuves nécessaires avant le premier succès, chaque essai ayant une probabilité de $\frac{1}{4}$ de réussir. Donc :

$$Y(\Omega) = Z(\Omega) = \mathbb{N}^* ; \begin{cases} \forall k \in Y(\Omega) ; P(Y=k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \times \frac{1}{4} \\ \forall k' \in Z(\Omega) ; P(Z=k') = \left(\frac{3}{4}\right)^{k'-1} \times \frac{1}{4} \end{cases}$$

On a : $\begin{cases} P(Y=k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \times \frac{1}{4} \\ P(Z=k') = \left(\frac{3}{4}\right)^{k'-1} \cdot \frac{1}{4} \end{cases}$ ②

2)b) $P(Y\leq k) = \sum_{j=1}^{k} P(Y=j) = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{j-1} \times \frac{1}{4}$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{j}$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{1} \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{k}}{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{k}}{\frac{1}{4}}$$

$$= 1-\left(\frac{3}{4}\right)^{k}$$

On a donc : $P(Y\leq k) = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^{k} \quad \forall k \in Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

2)c)i) $P(T\leq k) = P(\max(Y,Z) \leq k) = P(Y\leq k \cap Z \leq k)$

$\Rightarrow P(T\leq k) = P(Y\leq k) \times P(Z\leq k)$

$$= \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\right)^{2}$$

2)c)ii) on a : $P(T\leq k) = P(T=k) + P(T\leq k-1)$

$\Rightarrow P(T=k) = P(T\leq k) - P(T\leq k-1)$

$\Rightarrow P(T=k) = \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\right)^{2} - \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right)^{2}$

$$= \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{k} - 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right)\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{k} + 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\left(2 - \frac{7}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\right)$$

$\Rightarrow P(T=k) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{k} - \frac{7}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^{2k}$

2) c) iii) on a: $P(T=K) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^K - \frac{7}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^{2K}$

Donc: $E(T) = \sum_{K=1}^{+\infty} K P(T=K) = \sum_{K=1}^{+\infty} K \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^K - \sum_{K=1}^{+\infty} K \frac{7}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^{2K}$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)\sum_{K=1}^{+\infty} K\left(\frac{3}{4}\right)^{K-1} - \frac{7}{9}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2 \sum_{K=1}^{+\infty} K\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^{K-1}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} - \frac{7}{4^2}\times\frac{1}{\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^2}$$

$$= \frac{40}{7}$$

Enfin, $\boxed{E(T) = \frac{40}{7}}$

Exercice 2 :

1) on a: $X_1 \sim B(n_1, p)$ et $X_2 \sim B(n_2, p)$: Soient $K_1 \in X_1(\Omega)$ et $K_2 \in X_2(\Omega)$ et $K \in X(\Omega)$. Posons $X = X_1 + X_2$ alors $K = K_1 + K_2$; on a:

$P(X=K) = \sum_{K_1+K_2=K} P(X_1 = K_1 \cap X_2 = K_2)$, or X_1 et X_2 sont indépendantes, alors: $P(X_1 = K_1 \cap X_2 = K_2) = \binom{n_1}{K_1}\binom{n_2}{K_2} p^{K_1+K_2}(1-p)^{n_1+n_2-(K_1+K_2)}$

$$= \binom{n_1}{K_1}\binom{n_2}{K_2} p^K (1-p)^{(n_1+n_2)-K}$$

$\Rightarrow P(X=K) = \sum_{K_1+K_2=K} \binom{n_1}{K_1}\binom{n_2}{K_2} p^K (1-p)^{(n_1+n_2)-K}$

et on a d'après la théorème multinomial: $\sum_{K_1+K_2=K} \binom{n_1}{K_1}\binom{n_2}{K_2} = \binom{n_1+n_2}{K}$

Donc: $P(X=K) = \binom{n_1+n_2}{K} p^K (1-p)^{(n_1+n_2)-K} \Rightarrow \underbrace{X}_{=(X_1+X_2)} \sim B(n_1+n_2, p)$

2)

Soient $k_1 \in X_1(\Omega)$ et $k_2 \in X_2(\Omega)$ et $k \in X(\Omega)$

Posons : $X = X_1 + X_2$ alors : $k = k_1 + k_2$ et $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, on a :

$$P(X=k) = \sum_{k_1+k_2=k} P(X_1 = k_1 \cap X_2 = k_2)$$

Or X_1 et X_2 sont indépendantes, alors :

$$P(X_1 = k_1 \cap X_2 = k_2) = P(X_1 = k_1) \times P(X_2 = k_2)$$
$$= \frac{e^{-\lambda_1} \cdot \lambda_1^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{e^{-\lambda_2} \cdot \lambda_2^{k_2}}{k_2!}$$
$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \frac{\lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2}}{k_1!\, k_2!}$$

$$\Rightarrow P(X=k) = \sum_{k_1+k_2=k} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2}}{k_1!\, k_2!}$$

On a : $k_1 + k_2 = k \Rightarrow k_2 = k - k_1$

$$\Rightarrow P(X=k) = \sum_{k_1=0} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k-k_1}}{k_1!\,(k-k_1)!}$$

On a : $\binom{k}{k_1} = \frac{k!}{k_1!\,(k-k_1)!} \Rightarrow \left(\frac{1}{k!}\right)\binom{k}{k_1} = \frac{1}{k_1!\,(k-k_1)!}$

$$\Rightarrow P(X=k) = \sum_{k_1=0} e^{-\lambda} \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k-k_1} \cdot \frac{1}{k!}\binom{k}{k_1}$$
$$= e^{-\lambda} \times \frac{1}{k!} \sum_{k_1=0} \binom{k}{k_1} \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k-k_1}$$

On utilise la ~~formule~~ binôme de Newton : $\sum_{k_1=0} \binom{k}{k_1} \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k-k_1} = (\lambda_1 + \lambda_2)^k$

Donc : $P(X=k) = e^{-\lambda} \times \frac{1}{k!} (\lambda_1 + \lambda_2)^k = \frac{e^{-\lambda} (\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}$

Alors $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ où X suit une loi de poisson.

Exercice 3 :

$$Z(\Omega) = X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$$

$\forall K \in \mathbb{N} :\ P(X=K) = P(Y=K) = P(Z=K) = p.q^K$

1) Soit $X+Y=K$, on a :

si $X=0 \Rightarrow Y=K$

si $X=1 \Rightarrow Y=K-1$

si $X=j \Rightarrow Y=K-j$

Donc : $P(X+Y=K) = \sum_{j=0}^{K} P(X=j \cap Y=K-j)$

Or X et Y sont indépendantes, alors : $P(X=j \cap Y=K-j) = P(X=j) \times P(Y=K-j)$

$$\Rightarrow P(X+Y=K) = \sum_{j=0}^{K} P(X=j) \times P(Y=K-j)$$

$$= \sum_{j=0}^{K} pq^j \times pq^{K-j}$$

$$= p^2 . q^K \sum_{j=0}^{K} 1$$

$$= p^2 . q^K (K+1)$$

Donc : $P(X+Y=K) = p^2 . q^K (K+1) \quad \forall K \in X(\Omega)$

2) $P(Z \geq K) = \sum_{j=K}^{+\infty} P(Z=j) = \sum_{j=K}^{+\infty} pq^j = p \sum_{j=K}^{+\infty} q^j = p.q^K . \frac{1}{1-q}$

on a : $1-q = p$, donc :

$$P(Z \geq K) = \frac{p.q^K}{p} = q^K$$

3) $X+Y \leq Z$ si $X+Y=K$ et $K \leq Z$, avec $K \in \mathbb{N}$ donc :

$$P(X+Y\leq Z) = \sum_{K=0}^{+\infty} P(X+Y=K) \times P(K\leq Z)$$

$$= \sum_{K=0}^{+\infty} p^2 \cdot q^K (K+1) \cdot q^K$$

$$= p^2 \sum_{K=0}^{+\infty} (K+1)(q^2)^K$$

$$= p^2 \cdot (q^2)^0 \cdot \frac{1}{(1-(q^2))^2}$$

$$= \frac{p^2}{(1-q)^2(1+q)^2} = \frac{1}{(1+q)^2}$$

Donc : $\boxed{P(X+Y\leq Z) = \frac{1}{(1+q)^2}}$

Exercice 4 :

1) La variable aléatoire X représente le nombre de tirages nécessaires pour tirer la première boule noire. Donc X suit une loi géométrique $G\left(\frac{b}{a+b}\right)$ car on effectue des essais identiques et indépendantes jusqu'au premier succès, celui-ci survenant avec une probabilité de $\frac{b}{a+b}$.

Donc : pour $K=1,2,\dots$ $\quad P(X=K) = \left(1-\frac{b}{a+b}\right)^{K-1} \cdot \frac{b}{a+b}$

$$\Rightarrow \boxed{P(X=K) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^{K-1} \cdot \frac{b}{a+b}}$$

$\boxed{E(X) = \frac{b}{a+b}}$ $\qquad V(X) = \frac{1-\frac{b}{a+b}}{\left(\frac{b}{a+b}\right)^2} = \frac{a(a+b)}{(b)^2}$

2) La variable aléatoire Y représente le nombre de tirages nécessaires pour tirer la première boule rouge. Y ne suit pas ~~une~~ la loi géométrique car les essais ne sont pas indépendantes.

Donc,

Soient l'événement A_i : « On tire une boule rouge en ième tirage » et B_i : « on tire une boule noire en ième tirage. », on a :

Pour $k = 1, 2, \ldots, b, b+1$:

$$P(Y=k) = P(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap R_k)$$

$$= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times \ldots \times P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1}}(R_k)$$

$$= \frac{b(b-1)(b-2)\ldots(b-k+2) \times a}{(a+b)(a+b)(a+b-2)\ldots(a+b-k+2)(a+b-k+1)}$$

$$= \prod_{j=0}^{k-2} \frac{b-j}{a+b-j} \times \frac{a}{a+b-k+1}$$

Exercice 5 :

$$\cancel{\text{on a : } E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} i\,P(X=i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \Big(\sum_{j=1} P(X=i)\Big)}$$

$$\cancel{= \sum \sum}$$

on a : $E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} i\,P(X=i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \Big(\sum_{j=1}^{i} 1\Big) P(X=i)$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{i} P(X=i) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=j}^{+\infty} P(X=i)$$

$\Rightarrow E(X) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X \geq j)$ Alors : $\boxed{E(X) = \sum_{i \geq 1} P(X \geq i)}$